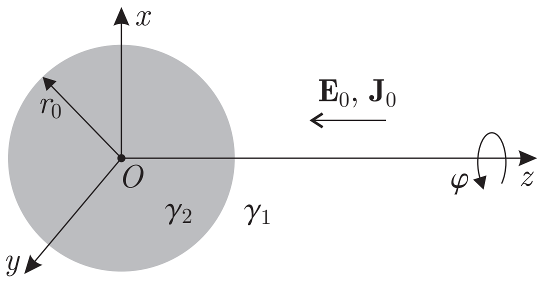
Krogla v tujem časovno nespremenljivem homogenem tokovnem polju

Edi Bulić

Ljubljana, 2008

Naloga

V mediju specifične prevodnosti γ_1 je tokovno polje homogeno. Vektorja električne poljske jakosti ter tokovne gostote tega polja sta $\mathbf{E}_0$ in $\mathbf{J}_0 = \gamma_1 \mathbf{E}_0$. V to polje postavimo krogelno telo polmera r_0 in specifične prevodnosti γ_2. Določite tokovno polje $\mathbf{J}$ v krogli in njeni okolici.



Slika 1: Krogelno telo v homogenem polju.

Rešitev

Izberimo krogelni koordinatni sistem tako, da je izhodišče v središču krogle ter da je smer osi z nasprotna smeri prvotnega homogenega polja, $\mathbf{E}_0 = -\mathbf{e}_z E_{0z}$ in $\mathbf{J}_0 = -\mathbf{e}_z J_{0z}$.

Porazdelitev električnega potenciala določa Laplaceova enačba

$$\triangle V = 0 \tag{1}$$

tako znotraj ($r < r_0$) kot zunaj ($r > r_0$) krogle. Potencial je funkcija le koordinat r in ϑ, saj je problem osno simetričen ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$):

$$V = V(r, \vartheta). \tag{2}$$

Če to simetrijo upoštevamo v Laplaceovem operatorju (v krogelnem koordinatnem sistemu), se enačba (1) glasi

$$\triangle V(r,\vartheta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) = 0. \tag{3}$$

To je parcialna diferencialna enačba 2. reda. Rešili jo bomo po metodi separacije spremenljivk. Vstavitev Fourierjevega nastavka za neznano funkcijo porazdelitve potenciala

$$V(r,\vartheta) = R(r)H(\vartheta) \tag{4}$$

v diferencialno enačbo in preurejanje le te, dá

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2R'H)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta RH')}{\partial\vartheta} = 0 \quad \Big/ \cdot r^2 \tag{5a}$$

$$2rR'H + r^2R''H + \cot\vartheta RH' + RH'' = 0 \quad \Big/ : RH \tag{5b}$$

$$\frac{r^2R''}{R} + \frac{2rR'}{R} + \frac{H''}{H} + \frac{\cot\vartheta H'}{H} = 0 \tag{5c}$$

$$\frac{r^2R'' + 2rR'}{R(r)} = -\frac{H'' + \cot\vartheta H'}{H(\vartheta)} = \lambda. \tag{5d}$$

Ker je prvi ulomek, ki je funkcija le koordinate r, enak drugemu ulomku, ki je funkcija le koordinate ϑ, pri različnih vrednostih teh koordinat, lahko sklepamo, da sta ulomka v bistvu neodvisna od koordinat in torej enaka konstanti, ki smo jo označili z λ. Po izenačenju vsakega ulomka posebej s to konstanto dobimo dve navadni diferencialni enačbi 2. reda za funkciji $R(r)$ in $H(\vartheta)$:

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R(r) = 0 \tag{6}$$

$$H'' + \cot\vartheta H' + \lambda H(\vartheta) = 0. \tag{7}$$

Prva je Eulerjeva enačba, drugo pa lahko s substitucijo spremenljivke prevedemo na Legendrovo enačbo. Ta substitucija je $\eta = \cos\vartheta \implies \vartheta = \arccos\eta$. Z njo se funkcija $H(\vartheta)$ ter njena odvoda prevedejo na

$$H(\vartheta) = H(\arccos\eta) = T(\eta) = T(\eta(\vartheta)) \tag{8}$$

$$H' = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\vartheta} = T'\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\vartheta} = -T'\sin\vartheta \tag{9}$$

$$H'' = \frac{\mathrm{d}H'}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d}(-T'\sin\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = -\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}\vartheta}\sin\vartheta - T'\cos\vartheta \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\vartheta} = -T''\sin\vartheta \tag{11}$$

$$H'' = T''\sin^2\vartheta - T'\cos\vartheta = T''(1-\eta^2) - T'\eta. \tag{12}$$

Če to upoštevamo v diferencialni enačbi (7), dobimo Legendrovo enačbo

$$T''(1-\eta^2) - T'\eta + \underbrace{\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}(-T'\sin\vartheta)}_{-\eta T'} + \lambda T(\eta) = 0 \tag{13a}$$

$$(1-\eta^2)T'' - 2\eta T' + \lambda T(\eta) = 0, \tag{13b}$$

ki jo rešujemo z nastavkom v obliki potenčne vrste [2, razdelek 2.3]

$$T(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \eta^m. \tag{14}$$

Ne bomo se spuščali v samo reševanje, temveč bomo le podali rešitev. Izkaže se, da je rešitev omejena povsod znotraj intervala $0 \leq \vartheta \leq \pi$ oz. $-1 \leq \eta = \cos\vartheta \leq 1$ le, če je konstanta λ enaka produktu dveh zaporednih, celih in nenegativnih števil: $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Rešitve Legendrove enačbe (13b) so Legendrovi polinomi (imenovani tudi krogelne funkcije) prve $P_n(\eta)$ in druge $Q_n(\eta)$ vrste reda n [1, Orodje]. Prve lahko izrazimo s formulo

$$P_n(\eta) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(\eta^2-1)^n}{\mathrm{d}\eta^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Legendrovi polinomi druge vrste imajo logaritemsko singularnost pri $\eta = \pm 1$. Za lažjo predstavo, s kakšnimi funkcijami imamo opravka, izpišimo nekaj prvih Legendrovih polinomov prve in druge vrste:

$$P_0(\eta) = 1, \quad P_1(\eta) = \eta, \quad P_2(\eta) = \frac{1}{2}\left(3\eta^2 - 1\right), \quad P_3(\eta) = \frac{1}{2}\left(5\eta^3 - 3\eta\right), \ \ldots \tag{16}$$

$$Q_0(\eta) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad Q_1(\eta) = P_1(\eta)Q_0(\eta) - 1, \quad Q_2(\eta) = P_2(\eta)Q_0(\eta) - \frac{3}{2}\eta, \ \ldots \tag{17}$$

Splošna rešitev Legendrove enačbe je torej oblike

$$T(\eta) = B_1 P_n(\eta) + B_2 Q_n(\eta), \tag{18}$$

kjer sta B_1 in B_2 zaenkrat še neznani konstanti, oziroma, če upoštevamo substitucijo $\eta = \cos\vartheta$,

$$T(\eta) = H(\vartheta) = B_1 P_n(\cos\vartheta) + B_2 Q_n(\cos\vartheta). \tag{19}$$

Funkcija $Q_n(\cos\vartheta)$ v našem primeru ne pride v poštev, saj je singularna pri $\eta = \cos\vartheta = \pm 1 \implies \vartheta = \Big\langle {0 \atop \pi}$, torej $B_2 = 0$ in

$$H(\vartheta) = B_1 P_n(\cos\vartheta). \tag{20}$$

Rešimo še Eulerjevo enačbo (6)

$$r^2 R'' + 2rR' - \underbrace{n(n+1)}_{\lambda} R(r) = 0 \tag{21}$$

in sicer s substitucijo spremenljivke $t = \ln r \implies r = \mathrm{e}^t$. Z njo se funkcija $R(r)$ in njena odvoda prevedejo na

$$R(r) = R(\mathrm{e}^t) = S(t) = S(t(r)), \tag{22}$$

$$R' = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}}_{1/r} = \frac{1}{r}S', \tag{23}$$

$$R'' = \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r} + S'\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \left(\underbrace{\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}t}}_{S''}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}S' = \frac{1}{r^2}S'' - \frac{1}{r^2}S'. \tag{24}$$

Če to upoštevamo v enačbi (21), dobimo

$$S'' - S' + 2S' - n(n+1)S(t) = 0 \tag{25a}$$

$$S'' + S' - n(n+1)S(t) = 0. \tag{25b}$$

Tej enačbi zadostita funkciji e^{nt} in $\mathrm{e}^{-(n+1)t}$, torej je njena rešitev oblike

$$S(t) = A_1\mathrm{e}^{nt} + A_2\mathrm{e}^{-(n+1)t}, \tag{26}$$

kjer sta A_1 in A_2 zaenkrat še neznani konstanti. Če upoštevamo še substitucijo $t = \ln r$, dobimo

$$R(r) = A_1\mathrm{e}^{n\ln r} + A_2\mathrm{e}^{-(n+1)\ln r} \tag{27a}$$

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}. \tag{27b}$$

Ker je funkcija $r^{-(n+1)}$ singularna pri $r = 0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$, ne pride v poštev v izrazu za porazdelitev potenciala znotraj krogle ($A_2 = 0$), v zunanjosti krogle pa teh težav ni. Ker moramo Laplaceovo enačbo (1) rešiti v bistvu dvakrat, prvič za notranjost ($r < r_0$) in drugič za zunanjost ($r > r_0$) krogle, smo očitno prišli do točke, ko moramo ti reševanji ločiti. Pripravimo si nastavka za rešitev Eulerjeve enačbe posebej za notranjost in zunanjost krogle:

$$R(r) = \begin{cases} A_{1,\mathrm{not.}} r^n & , \quad r < r_0 \\ A_{1,\mathrm{zun.}} r^n + A_{2,\mathrm{zun.}} r^{-(n+1)} & , \quad r > r_0 \end{cases}, \tag{28}$$

kjer so $A_{1,\mathrm{not.}}$, $A_{1,\mathrm{zun.}}$ in $A_{2,\mathrm{zun.}}$ še nedoločene konstante.

Nastavka (20) in (28) za rešitev Legendrove oziroma Eulerjeve enačbe združimo po enačbi (4) v nastavka za rešitev Laplaceove enačbe (1) v notranjosti ter zunanjosti krogle:

$$V_{\mathrm{not.}}(r,\vartheta) = C_1 r^n P_n(\cos\vartheta), \quad r < r_0 \tag{29}$$

$$V_{\mathrm{zun.}}(r,\vartheta) = \left(C_2 r^n + C_3 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\vartheta), \quad r > r_0 \tag{30}$$

[1], kjer smo upoštevali, da je produkt dveh konstant spet konstanta, npr. $C_1 = A_{1,\text{not.}} B_1$.

Naslednji korak je določanje konstant n, C_1, C_2 in C_3, ker bomo tako konkretizirali nastavka (29) in (30) oz. določili porazdelitev potenciala v in ob krogli. Če krogle ne bi bilo, bi porazdelitev potenciala (v homogenem polju $\mathbf{E} = -\mathbf{e}_z E_{0z}$) bila

$$V_0 = E_{0z} z = E_{0z} r \cos\vartheta = V_0(r,\vartheta). \tag{31}$$

Če smo zelo oddaljeni od krogle ($r \to \infty$), je potencial takšen kot, da krogle ne bi bilo, saj ni fizikalnega razloga, da bi krogla zmotila polje tudi daleč stran[2]:

$$\lim_{r\to\infty} V_{\text{zun.}}(r,\vartheta) = C_2 r^n P_n(\cos\vartheta) = V_0(r,\vartheta) = E_{0z} r \cos\vartheta. \tag{32}$$

Iz tega sledi $n = 1$ ter $C_2 = E_{0z}$, saj je po izrazih (16) $P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$. Nastavka (29) in (30) sta sedaj enaka

$$V_{\text{not.}}(r,\vartheta) = C_1 r \cos\vartheta, \quad r < r_0 \tag{33}$$

$$V_{\text{zun.}}(r,\vartheta) = \left(E_{0z} r + C_3/r^2\right)\cos\vartheta, \quad r > r_0. \tag{34}$$

Konstanti C_1 in C_3 določimo iz mejnih pogojev na površini krogle:

- potencial je zvezna funkcija tudi pri prehodu čez mejo, ker bi v nasprotnem poljska jakost $\mathbf{E} = -\nabla V$ bila singularna:

$$V_{\text{not.}}(r_0 - 0,\vartheta) = V_{\text{zun.}}(r_0 + 0,\vartheta), \tag{35}$$

- normalna komponenta tokovne gostote prehaja mejo zvezno, saj je polje časovno nespremenljivo [1, enačba 2.20]:

$$\mathbf{n}\cdot[\mathbf{J}_{\text{zun.}}(r_0+0,\vartheta) - \mathbf{J}_{\text{not.}}(r_0-0,\vartheta)] = 0. \tag{36}$$

Če v zadnji enačbi izrazimo normalno komponento tokovne gostote z normalnim odvodom potenciala,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J} = J_n = \gamma E_n = -\gamma \mathbf{n}\cdot\nabla V = -\gamma\frac{\partial V}{\partial n}, \tag{37}$$

ter upoštevamo, da je normala na površino krogle enaka baznemu vektorju r koordinate, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, torej, da je normalni odvod enak odvodu po koordinati r, $\partial/\partial n \equiv \partial/\partial r$, dobimo

$$\gamma_2 \frac{\partial V_{\text{not.}}}{\partial r}\bigg|_{(r_0-0,\vartheta)} = \gamma_1 \frac{\partial V_{\text{zun.}}}{\partial r}\bigg|_{(r_0+0,\vartheta)}. \tag{38}$$

[1] Še bolj splošen nastavek za rešitev je

$$V_{\text{not.}}(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} r^n P_n(\cos\vartheta), \quad r < r_0$$

$$V_{\text{zun.}}(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{2,n} r^n + C_{3,n} r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\vartheta), \quad r > r_0,$$

vendar se bo izkazalo, da lahko robnim pogojem zadostimo že z enim samim členom.

[2] To lahko razumemo kot robni pogoj potenciala na “meji” $r \to \infty$.

Ko v enačbah (35) in (38) za potenciala vstavimo izraza (33) ter (34), dobimo sistem dveh enačb z neznankama C_1 in C_3:

$$C_1 r_0 \cos\vartheta = \left[E_{0z} r_0 + C_3/r_0^2\right] \cos\vartheta, \tag{39a}$$

$$\gamma_2 C_1 \cos\vartheta = \gamma_1 \left[E_{0z} - 2C_3/r_0^3\right] \cos\vartheta. \tag{39b}$$

Rešitev tega sistema je

$$C_1 = \frac{3\gamma_1}{2\gamma_1 + \gamma_2} E_{0z} \qquad \text{ter} \qquad C_3 = r_0^3 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_1 + \gamma_2} E_{0z}. \tag{40}$$

Tako smo določili še zadnji neznanki v izrazih za porazdelitev potenciala (33) in (34). Če vpeljemo okrajšavi

$$\Gamma_{\text{not.}} = \frac{3\gamma_1}{2\gamma_1 + \gamma_2} \qquad \text{ter} \qquad \Gamma_{\text{zun.}} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_1 + \gamma_2}, \tag{41}$$

se ta porazdelitev glasi

$$V(r,\vartheta) = \left\{ \begin{array}{cl} \Gamma_{\text{not.}} E_{0z} r \cos\vartheta & , \quad r \le r_0 \\ \left(r + \Gamma_{\text{zun.}} r_0^3/r^2\right) E_{0z} \cos\vartheta & , \quad r > r_0 \end{array} \right. . \tag{42}$$

Iz porazdelitve potenciala lahko določimo tokovno polje $\mathbf{J}$ po Ohmovem zakonu $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} = -\gamma\nabla V$, kjer pri gradientu (v krogelnem koordinatnem sistemu) upoštevamo osno simetrijo ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$):

$$\mathbf{J}(r,\vartheta) = -\mathbf{e}_r \gamma \frac{\partial V}{\partial r} - \mathbf{e}_\vartheta \gamma \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \tag{43}$$

Po tej formuli določimo porazdelitev tokovne gostote $\mathbf{J}$ v krogli in njeni okolici:

$$\boxed{\mathbf{J}(r,\vartheta) = \left\{ \begin{array}{cl} \left(-\mathbf{e}_r \cos\vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \sin\vartheta\right) \Gamma_{\text{not.}} \gamma_2 E_{0z} & , \quad r \le r_0 \\ \left\{\mathbf{e}_r \left[2\Gamma_{\text{zun.}} (r_0/r)^3 - 1\right] \cos\vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \left[\Gamma_{\text{zun.}} (r_0/r)^3 + 1\right] \sin\vartheta\right\} \gamma_1 E_{0z} & , \quad r > r_0 \end{array} \right.}.$$

Priporočljive dodatne naloge

Še dve nalogi v krogelni geometriji sta rešeni v [1] (zgleda 7.6 in 7.7) pa tudi tri v valjni geometriji (zgledi 7.3, 7.4 in 7.5) ter dve v kartezični (zgleda 7.1 in 7.2). Veliko analitično rešenih nalog najdete tudi v [3].

Literatura

[1] Anton R. Sinigoj: *ELMG polje*. Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 1996.

[2] Gabrijel Tomšič in Tomaž Slivnik: *Matematika IV*. Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2004.

[3] Matjaž Vidmar: *Vaje iz teorije elektromagnetike*. Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 1997.